Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Prince Moulay Abdellah	**Cours** Fonctions affines et linéaires	Niveau : 3éme_Collège Année : 2023-2024

1 Définitions

Définition

Une fonction f est **affine** si elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

On dit alors que a est le **coefficient directeur** de la fonction affine et b est l'**ordonnée à l'origine** de la fonction affine.

Exemple :

$f(x) = 5x + 8$; $g(x) = 2,5x - 7$; et $h(x) = -2x - 3,4$ sont des fonctions affines.

Remarque :

Évidemment si l'on échange les deux termes on a toujours une fonction affine... $h(x) = -3,4 - 2x$ est affine.

Définition

Une fonction f est **linéaire** si elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax$, où a est un nombre réel.

Exemple :

$f(x) = -15x$ et $g(t) = 8t$ sont des fonctions linéaires.

Remarques :

1) Les fonctions linéaires sont donc aussi des fonctions affines avec une ordonnée à l'origine nulle ($b = 0$).

2) Pourquoi étudier les fonctions affines et leurs cas particuliers : les fonctions linéaires ? Parce que ce sont les fonctions les plus simples, comme nous le verrons plus tard, leurs représentations graphiques sont des droites et en sciences on préfère on général ramener un problème à l'étude de droites plutôt que d'autres choses qui peuvent être beaucoup trop complexes.

2 Un exemple particulier

Considérons la fonction $f(x) = \frac{8}{5}x - 3$. C'est bien une fonction affine de coefficient directeur $\frac{8}{5} = 1,6$ mais ça n'est pas une fonction linéaire puisque son ordonnée à l'origine n'est pas nulle mais vaut -3.

Calculons quelques valeurs de la fonction f en certains points, par exemple 0 ; 15 ; et -5 :

$$f(0) = \frac{8}{5} \times 0 - 3 = -3 \quad ; \quad f(15) = \frac{8}{5} \times 15 - 3 = 21 \quad ; \quad f(-5) = \frac{8}{5} \times (-5) - 3 - 8 - 3 = -11$$

On peut regrouper les valeurs calculées dans un tableau ayant en première ligne les antécédents (les valeurs choisies de x) et en seconde ligne les images (les valeurs renvoyées par la fonctions f) :

x (antécédents)	0	15	-5
$f(x)$ (images)	-3	21	-11

3 Calcul du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine

3.1 Calcul du coefficient directeur

Propriété

La valeur du **coefficient directeur** d'une fonction affine f est égale au **quotient** de la différence de deux images par la différence des deux antécédents correspondants.

Exemple :

Soit g une fonction affine dont on ne connaît pas l'expression mais dont on connaît quelques valeurs (par exemple sous forme de tableau) :

x	2	5	-4
$g(x)$	-2	-17	28

La prorpiété précédente nous dit que l'on peut calculer le coefficient directeur a de la fonction g en calculant :

- la différence de deux images (n'importe lesquels) : $g(5) - g(2) = -17 - (-2) = -15$

- la différence des antécédents correspondants : $5 - 2 = 3$

- le quotient de ces deux dernières valeurs : $\dfrac{g(5) - g(2)}{5 - 2} = \dfrac{-15}{3} = \boxed{-5}$

Le coefficient directeur de g est donc -5, ce qui veut dire que l'expression de g est de la forme $g(x) = -5x + b$. Reste à trouver la valeur de l'ordonnée à l'origine b.

Remarques :

Dans ce dernier exemple, pour calculer le coefficient directeur j'ai choisis d'utiliser les antécédents 2 et 5. Était-ce la seule possibilité ? Non, on aurait tout aussi bien pu choisir deux autres nombres et l'on aurait évidemment trouvé après calculs la même valeur -5. La preuve, en choisissant par exemple les antécédents -4 et 5 :

$$\frac{g(5) - g(-4)}{5 - (-4)} = \frac{-17 - 28}{5 + 4} = \frac{-45}{9} = \boxed{-5}$$

3.2 Calcul de l'ordonnée à l'origine

Propriété

Si l'on connaît le coefficient directeur a ainsi que la valeur de la fonction f en un point u (par exemple $f(u) = v$) alors on peut calculer l'ordonnée à l'origine b en résolvant l'équation $f(u) = au + b = v$.

Exemple :

Reprenons la fonction g de l'exemple précédent. On avait trouvé $g(x) = -5x + b$, on connaît donc le coefficient directeur $a = -5$ et on connaît aussi la valeur de g en un point (même trois en fait), par exemple $g(-4) = 28$.
Pour trouver l'ordonnée à l'origine b il faut donc résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} g(-4) = -5 \times (-4) + b &= 28 \\ +20 + b &= 28 \\ b &= 28 - 20 \\ b &= 8 \end{aligned}$$

Finalement l'expression de la fonction affine g est $\boxed{g(x) = -5x + 8}$.

4 Représentations graphiques

4.1 Graphique à partir d'une expression

Propriété

Une fonction est **affine** si et seulement si sa courbe représentative est une **droite**.
Une fonction est **linéaire** si et seulement si sa courbe représentative est une **droite passant par l'origine**.

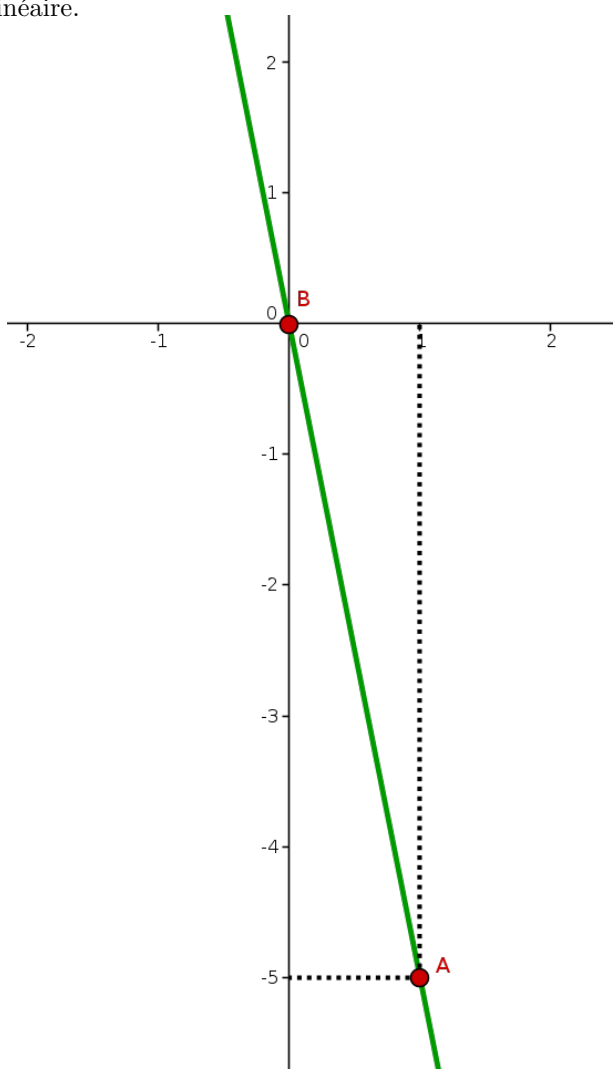
Remarques :

1) Les fonctions linéaires caractérisent donc des situations de proportionnalité où les points sont alignés avec l'origine (caractérisation vue en classe de 5ème).

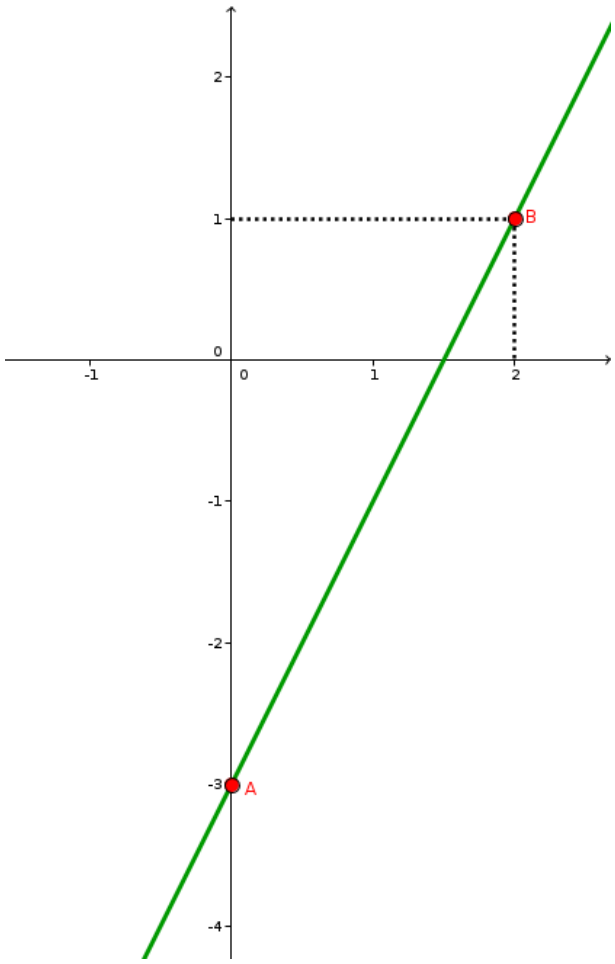
2) Puisque les courbes représentatives des fonctions affines et linéaires sont des droites il suffit alors d'avoir deux couples de points (*antécédents ; images*) dans un repère pour tracer la droite correspondant à l'une de ces fonctions.

Exemples :

Soit f une fonction linéaire définie par l'expression $f(x) = -5x$. On a par exemple $f(1) = -5 \times 1 = -5$. L'image de 1 par la fonction f est -5. La courbe représentative de f passe donc par le point $A(1;-5)$ et aussi par l'origine $(0;0)$ puisque c'est une fonction linéaire.



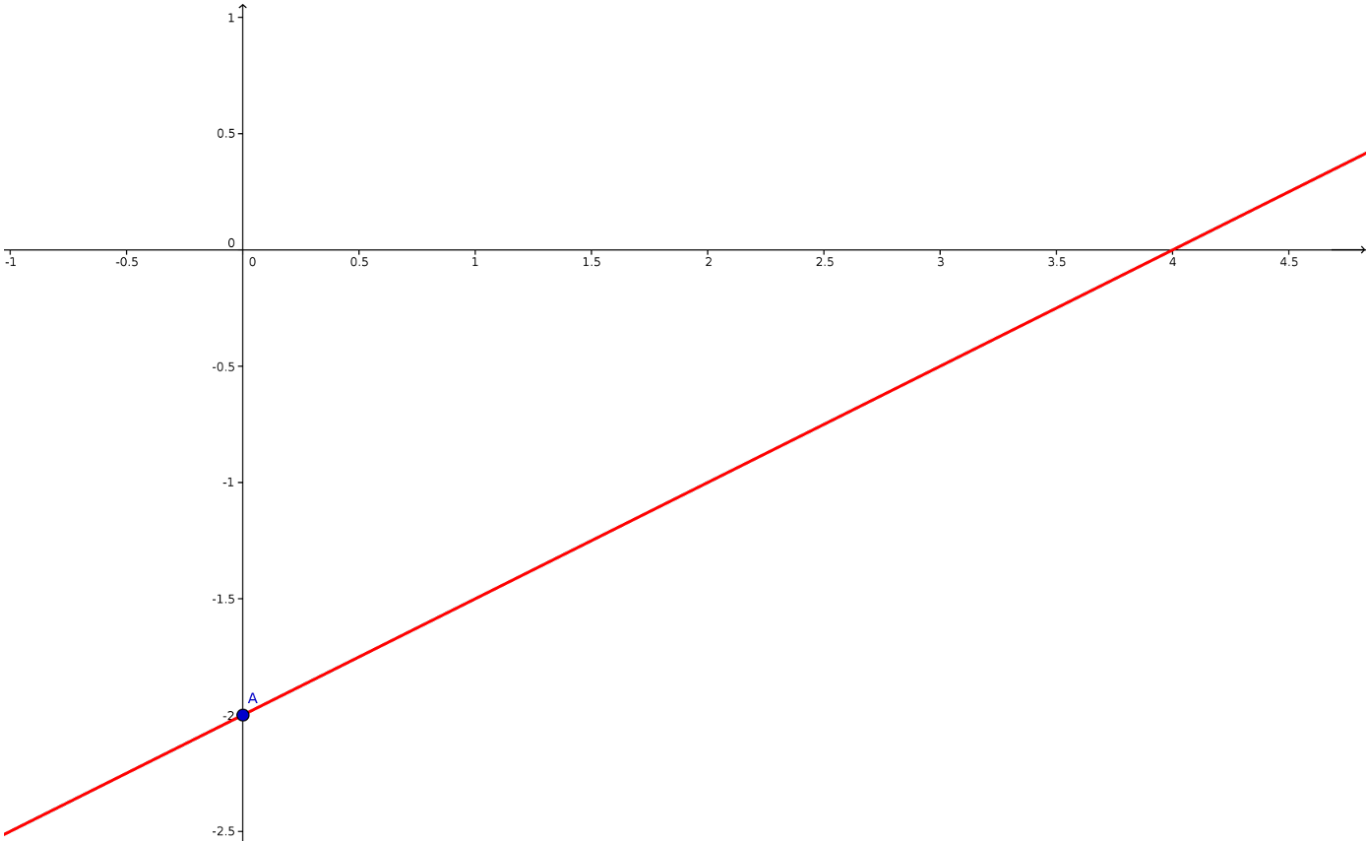
Soit g la fonction affine dont l'expression est : $g(x) = 2x - 3$. On calcule par exemple :
$g(0) = 2 \times 0 - 3 = -3$ et $g(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$
la droite représentant g passe donc par le point $A(0;-3)$ et le point $B(2;1)$



4.2 Expression à partir d'un graphique

On peut tout à fait retrouver l'expression d'une fonction affine ou linéaire en observant son graphique. Pour cela il existe au moins deux méthodes mais nous ne parlerons que d'une seule ici (l'autre sera vue dans le chapitre système d'équations).

Tâchons retrouver l'expression d'une fonction affine dont le graphe est le suivant :

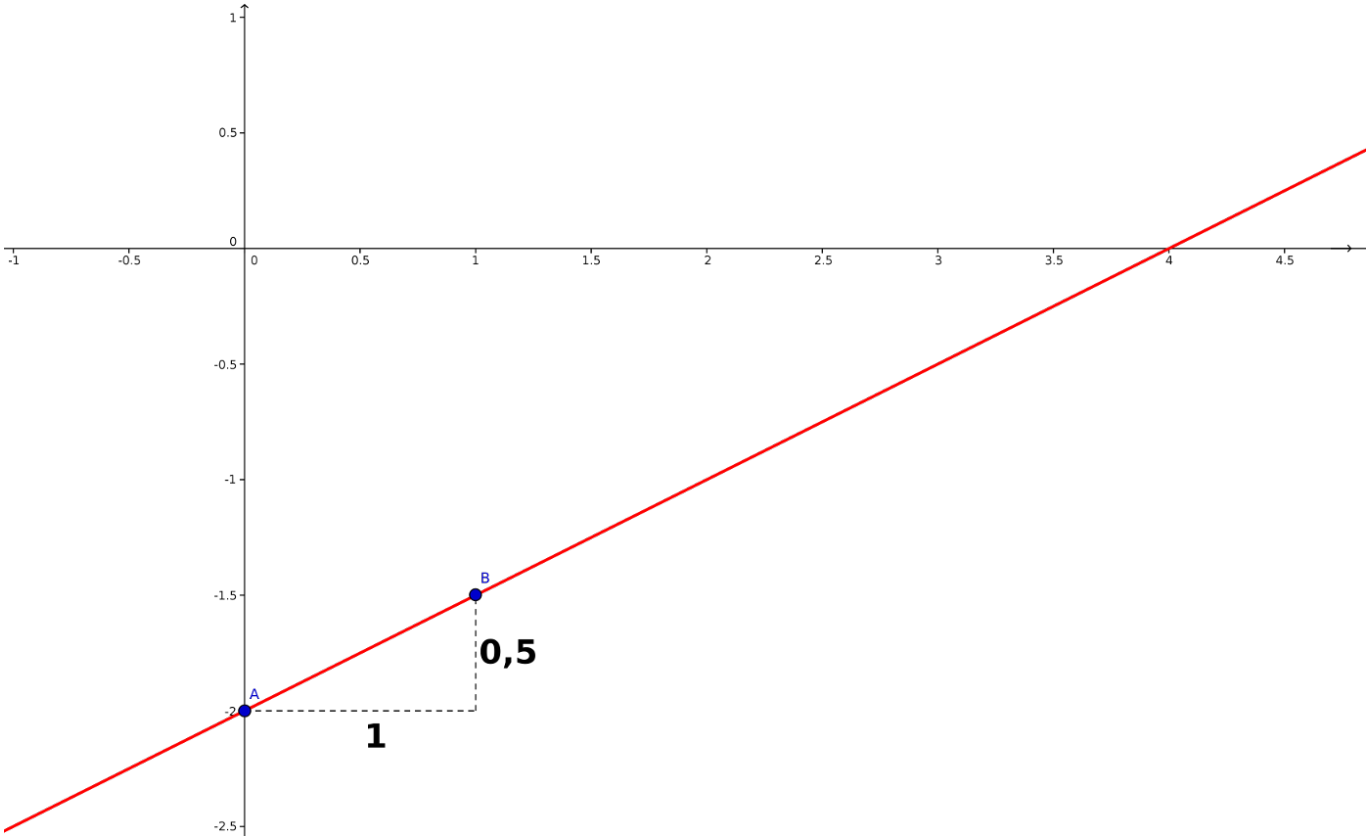


Propriété

Comme son nom l'indique, l'**ordonnée à l'origine** d'une fonction affine f correspond à l'ordonnée à laquelle la droite représentative de f possède la même abscisse que l'origine. Autrement dit, c'est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite représentative de f avec l'axe des ordonnées.

Exemple :

Dans le graphique précédent la droite représentative de f (en rouge) coupe l'axe des ordonnées en un point A qui a pour ordonnée -2. L'expression de f est donc du type $f(x) = ax - 2$. Reste à trouver le coefficient directeur a de f.



Comment faire pour déterminer le coefficient directeur de f ? C'est en réalité très simple, il suffit de remarque que la droite représentative de f passe par les points $A(0;-2)$ et $B(1;-1,5)$. On a donc $f(0)=-2$ et $f(1)=-1,5$.
Il ne reste plus qu'à calculer le coefficient directeur de la même manière que dans la partie 3 de ce chapitre. Le coefficient directeur a de cette fonction f vaut donc :

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{-1,5-(-2)}{1}=\boxed{0,5}$$

L'expression de f est donc $f(x)=0,5x-2$.

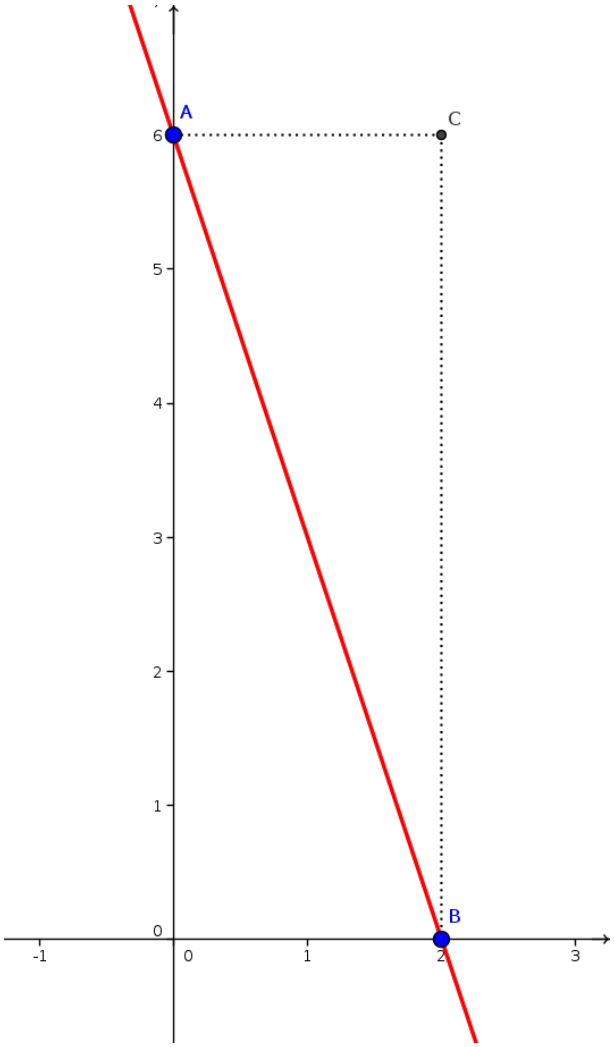
Remarques :

1) On peut aussi trouver directement et sans calcul le coefficient directeur d'une fonction affine en observant la position de deux points sur la droite. Dans la figure ci-dessus, pour aller du point A au point B on avance horizontalement de 1 unité et on monte verticalement de 1/2 unité. Le coefficient directeur est aussi le quotient de ces deux quantités : $a=\frac{1/2}{1}=0,5$.

2) Si la droite *monte* (est croissante) alors le coefficient directeur est positif mais si la droite *descend* (est décroissante) alors le coefficient directeur est négatif.

Un dernier exemple :

Soit g une fonction affine dont le graphique est représenté ci-dessous. Quelle est l'expression de g ?



La droite représentative de g (en rouge) coupe l'axe des ordonnées en un point A d'ordonnée 6. L'expression de g est donc du type $g(x) = ax + 6$. Cherchons le coefficient directeur a de g :

Remarquons que la droite *descend* (est décroissante), le coefficient directeur doit donc être négatif !
À l'aide du point A et du point B on a : $g(0) = 6$ et $g(2) = 0$.
Donc le calcul du coefficient directeur s'obtient par

$$a = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 6}{2} = -3$$

L'expression de la fonction g est donc : $g(x) = -3x + 6$.